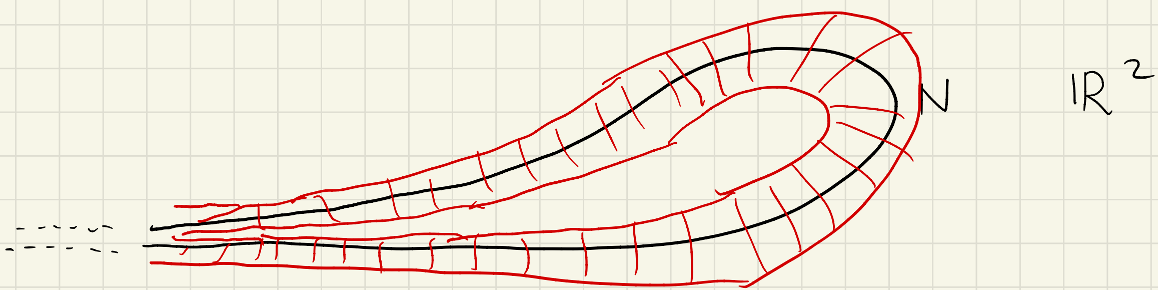
Lezione 11

$N^n \subseteq M^m$

Un INTORNO TUBOLARE è $\begin{array}{c} E \xhookrightarrow{i} M \\ \downarrow \\ N \end{array}$ $\quad i|_N = id_N \quad i(E)$ aperto

Teo: $\exists$ intorno tubolare con $E = \nu N$

Oss: N può non essere cpt $\qquad$ **Es:** $M = \mathbb{R}^2 \quad N \cong \mathbb{R}^1$

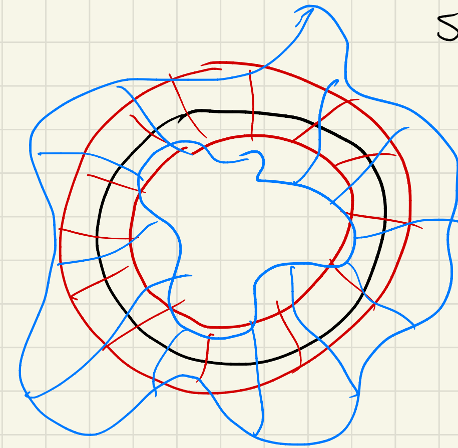


Def: $N \subseteq M$. $\quad i_1 : \begin{array}{c} E^1 \to M \\ \downarrow \\ N \end{array} \quad i_0 : \begin{array}{c} E^0 \to M \\ \downarrow \\ N \end{array}$ intorni tubolari

Una ISOTOPIA fra i_0 e i_1 è

il dato di un isomorfismo ψ:
$$\begin{tikzcd} E^0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "id"] & N \end{tikzcd}$$

$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$



e di una isotopia

$$\begin{tikzcd} F_t : E^0 \arrow[r] \arrow[d] & M \\ N & \end{tikzcd} \qquad \text{con } F_0 = i_0$$

$$F_t|_N = id_N \qquad F_1 = i_1 \circ \psi$$

A ogni $t \in [0,1]$ è embedding e quindi F_t è intorno tubolare

Teo: $\exists!$ Intorno tubolare per $N \subseteq M$ a meno di isotopia

Cor: Gli intorni tubolari di N sono tutti isomorfi.

dim: **Teo**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ embedding (diffeom.) t.c. $f(0)=0$

$\Rightarrow$ f è isotopo a df_0 tramite isotopia che fissa 0
(isotopia in cui ogni F_t è diffeom)

dim: $F(x,t) = F_t(x) = \dfrac{f(tx)}{t}$ $t=1$: $F_1 = f$
$t \in (0,1]$

$$f(x) = h_1(x)x_1 + \dots + h_n(x)x_n \qquad h_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

$$F_t(x) = \frac{1}{t}\left(h_1(tx)\,tx_1 + \dots + h_n(tx)\,tx_n\right)$$

$$= h_1(tx)\,x_1 + \dots + h_n(tx)\,x_n \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$F_0(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(0)x_n = (df_0)(x)$$

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liscia

Back to Teo: $i_0 : E^0 \hookrightarrow M$ $i_1 : E^1 \hookrightarrow M$

$$\begin{array}{cc} E^0 & E^1 \\ \downarrow & \downarrow \\ N & N \end{array}$$

Penso a $E^1 \subseteq M$ $i_0 : E^0 \hookrightarrow M$ $\exists\, g : E^0 \to E^0$ strizzamento
t.c. $g(E^0) \subseteq i_0^{-1}(E^1)$

Isotopia F fra i_0 è $i_0 \circ g$ $\qquad F_t : E^0 \hookrightarrow M$

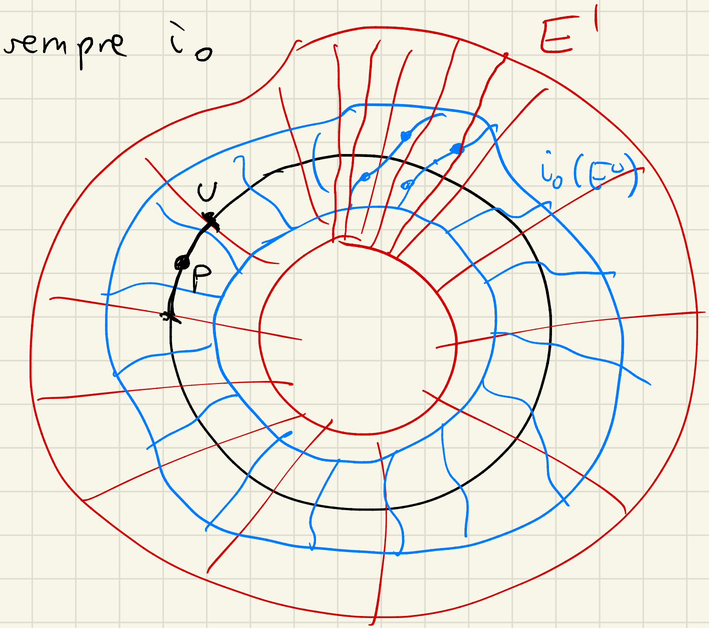
$$F_t(v) = F(v,t) = i_0\big(\underbrace{(1-t)v + tg(v)}\big)$$

Così ottengo $i_0 \circ g$ che chiamo sempre i_0

$$i_0(E^0) \subseteq E^1$$

Isotopia fra i_0 e i_1: $F_t : E^0 \hookrightarrow M$

$$\boxed{F_t(v) = \frac{i_0(tv)}{t}} \qquad t > 0$$



$$F_1(v) = i_0(v) \qquad F_1 = i_0$$

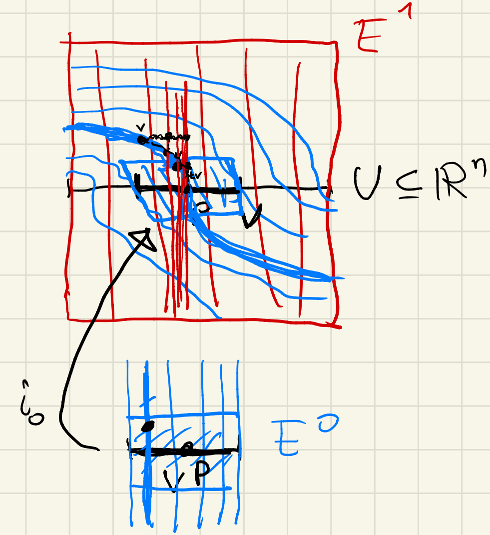
Definiamo F_0:

Prendo $p \in N$

Posso supporre di essere in questo caso:

$$E^1 = U \times \mathbb{R}^{m-n} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

$$V \subseteq U \qquad E^0\big|_V = V \times \mathbb{R}^{m-n}$$



$\exists V, \ \exists R > 0$ t.c. $\quad V \times B(0,R) \subseteq U \times \mathbb{R}^{m-n}$

$$i_0(x,0) = (x,0) \qquad \underset{x}{\mathbb{R}^n} \times \underset{y}{\mathbb{R}^{m-n}}$$

$$F_t(v) = \frac{i_0(tv)}{t}$$ Scrivo F_t localmente

$$i_0(x,y) = \left(i_0^1(x,y),\ i_0^2(x,y)\right) \qquad i_0^2(x,0) = 0$$

Sviluppo Taylor su y

$$i_0^2(x,y) = h_1(x,y)y_1 + \dots + h_{m-n}(x,y)y_{m-n} \qquad h_i(x,0) = \frac{\partial i_0^2}{\partial y_i}(x,0)$$

$$F_t(x,y) = \text{"}\frac{i_0(x,ty)}{t}\text{"} = \left(i_0^1(x,ty),\ \frac{i_0^2(x,ty)}{t}\right)$$

$$= \left(i_0^1(x,ty),\ h_1(x,ty)\cancel{t}y_1 + \dots + h_{m-n}(x,ty)\cancel{t}y_{m-n}\right)$$

Si può estendere a $F_0(x,y) = \left(i_0^1(x,0),\ h_1(x,0)y_1 + \dots + h_{m-n}(x,0)y_{m-n}\right)$

$$= \Big(x,\ \underbrace{\frac{\partial i_0^2}{\partial y_1}(x,0)y_1 + \dots + \frac{\partial i_0^2}{\partial y_{m-n}}(x,0)y_{m-n}}_{\text{è lineare. È isomorfismo? SI}}\Big)$$

i_0 embedding in $(x,0)$

$$\Rightarrow di_{0(x,0)} = \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & \boxed{\frac{\partial i_0^2}{\partial y}} \end{pmatrix} \leftarrow \text{è invertibile}$$

Ho ottenuto che F_0 è un isomorfismo fra i fibrati vettoriali E_0 & E_1

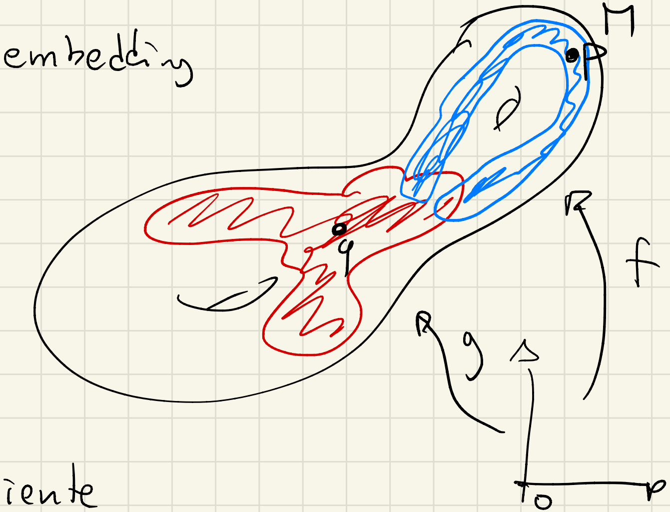
$\square$

<u>Conseguenze</u>

Prop: M^n connessa. $f,g:\mathbb{R}^n \hookrightarrow M$ embedding

sono sempre isotopi a meno di

precomporre g con una riflessione.
qualsiasi



dim:

$p=f(0)$ $\quad g(0)=q$

Componendo g con una isotopia ambiente

posso supporre che $g(0)=q=p=f(0)$

Interpreto f e g come due intorni tubolari di $p=q$

unicità: $g \sim g'$ isotopia $\quad g'=f\circ\psi$

$\psi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isom. lineare $\quad \psi \in GL(n,\mathbb{R})$

Fatto: $GL(n,\mathbb{R})$ ha 2 comp. conn. $\quad \psi \begin{cases} \to id & \det\psi>0 \\ \to \rho & \det\psi<0 \end{cases}$ ρ rifl.

Prop: $\boxed{\begin{array}{l} f: M \to N \text{ cont} \\ S \subseteq M \text{ chiuso } f|_S \text{ liscia} \end{array}}$ $\Rightarrow \exists\, g$ omotopa a f liscia con $g|_S = f|_S$

dim: Whitney: $\underline{N \subseteq \mathbb{R}^N}$ $\quad \nu N \subseteq \mathbb{R}^N \quad \underline{\nu N \xrightarrow{\pi} N}$

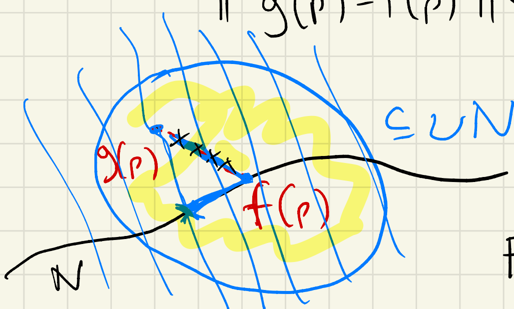
$f: M \to N \subseteq \mathbb{R}^N$ $\qquad \underline{\varepsilon(p) = d(f(p), \mathbb{R}^N \setminus \nu N)}$

già visto

$\exists\, g: M \to \mathbb{R}^n$ liscia $\Rightarrow$ $g: M \to \underline{\nu N} \xrightarrow{\pi} N$

$g|_S = f|_S$ $\qquad\qquad g' = \pi \circ g$

$\| g(p) - f(p) \| < \varepsilon(p) > 0$ $\qquad (\pi \circ g)|_S = f|_S$



g' omotopa a f

$\underline{f(p)} = q \in N \quad \underline{g(p)} \in \nu N_q$

$F_t(p) = \pi(g(p)\cdot(1-t) + f(p)\cdot t)$

Cor: $f, g : M \to N$ lisce $\quad \underset{\text{omotope continue}}{f \sim g} \Rightarrow \underset{\text{omotopia liscia}}{f \sim g}$

dim: $F : \underline{M \times [0,1]} \to N \quad \underline{F_0 = f} \quad \underline{F_1 = g} \quad F_t$ non è liscia se $t \neq 0, 1$

$F : \underline{M \times \mathbb{R}} \to N$ cont.

$F|_S$ liscia $\quad S = M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$

$F \dashrightarrow G$ liscia $: M \times \mathbb{R} \to N \quad F|_S = G|_S$

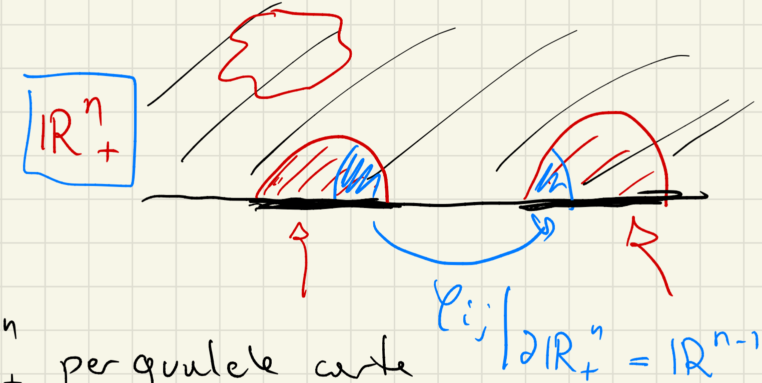
omotopia liscia tra f e g $\square$

$\vdash\!\!\dashv$

VARIETÀ CON BORDO

Def: Una VARIETÀ CON BORDO è uno spazio topologico X con un atlante $\mathcal{A} = \{(\varphi_i : U_i \to V_i)\}$ t.c. φ_{ij} lisce

$V_i \subseteq \mathbb{R}^n_+ = \{x_n \geq 0\}$



$\partial \mathbb{R}^n_+ = \{x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1}$

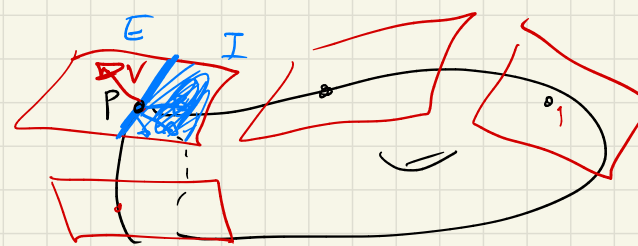
I punti di X che vanno in $\partial \mathbb{R}^n_+$ per qualche carta formano il BORDO di X
∂X

$\text{int}(X) = X \setminus \partial X$

Oss: M n-varietà con $\partial \Rightarrow \partial M$ è $(n-1)$-varietà senza ∂.

Diamo a ∂M l'atlante massimale di M ristretto a $\partial \mathbb{R}^n_+$

$\partial(\partial M) = \emptyset$



- spazio tangente con le derivazioni

- $p \in \partial M$ $\quad T_p \partial M \subseteq T_p M$

- M orientata $\Rightarrow \partial M$ orientato outward first

$T_p \partial M \subseteq T_p M$

$\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ base di $T_p \partial M$ è POSITIVA se, dato $v \in E_p$

$\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ " " di $T_p M$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \bar{x}^j \qquad \boxed{\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}}$$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad x_1, \dots, x_n$

$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$

$\bar{x} = \varphi(x)$ $\quad \varphi$ diffeo